

Agentúra pre vedu a výskum
Ministerstvo Školstva Slovenskej Republiky

Doc. RNDr. Roman Nedela, CSc.
Doc. RNDr. Miroslav Haviar, CSc.

Reprezentácie diskrétnych štruktúr a ich aplikácie

Záverečná správa projektu

Grant APVT-51-012502
Banská Bystrica, Október 2005

Závěrečná správa bola vypracovaná na Matematickom Ústave SAV
a na Univerzite Mateja Bela v Banskej Bystrici

Adresa:

Inštitút matematiky a informatiky
Matematický ústav SAV
Severná 5
974 00 Banská Bystrica

Spolupracujúce pracoviská:

Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied
Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta
Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici

Ústav pre vedu a výskum
Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici

.....
Doc. RNDr. Roman Nedela, CSc.
vedúci projektu

.....
Prof. RNDr. Anatolij Dvurečenský, DrSc.
riaditeľ MÚ SAV

Obsah

1	Základné informácie	5
2	Tranzitívne akcie grúp na súvislých grafoch	5
3	Mapy a hypermapy daného rodu	8
4	Regulárne vnorenia grafov do plôch	13
5	Steinerovské systémy trojíc a rozklady K_n na faktory stupňa 2	13
6	Postupnosti excentricít v grafoch	14
7	Uloženia grafov do mriežok dimenzie 1 a 3	14
8	Kryštalizácie topologických 3-variet rodu 2	15
9	Prirodzené duality	16
10	Vzťah plných a silných prirodzených dualít	17
11	Prenos optimálnych prirodzených dualít	19
12	Štandardné topologické kvazivariety	19
13	Publikácie, ktoré vznikli v rámci riešenia projektu	26
14	Zoznam vybraných prednášok na pozvanie a vystúpení na konferenciách	28
15	Zhrnutie	29

1 Základné informácie

Názov projektu: Reprezentácie diskretných štruktúr a ich aplikácie

Typ projektu: Základný výskum

Vedúci projektu: Doc. RNDr. Roman Nedela, CSC

Riešiteľská organizácia:

Matematický Ústav SAV
Štefánikova 49
Bratislava

Doba trvania projektu: 1.9. 2002 - 30.10. 2005

Riešiteľský kolektív:

Doc. RNDr. Miroslav Haviar, CSc. - zástupca vedúceho projektu

Doc. RNDr. Alfonz Haviar, CSc.

Doc. RNDr. Pavol Klenovčan, CSc.

RNDr. Pavol Konôpka, CSc.

RNDr. Gabriela Monoszová, CSc.

RNDr. Pavol Hrnčiar, CSc.

RNDr. Miroslav Hužvár

Mgr. Ján Karabáš

Ing. Ľubomír Török

Spoluriešiteľská organizácia: Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici

Rozpočet projektu: 615 tis. Sk

2 Tranzitívne akcie grúp na súvislých grafoch

Informácia o štruktúre bodových stabilizátorov je pri štúdiu permutačných grúp veľmi dôležitá. V tejto sekcii najskôr stručne spomenieme najdôležitejšie výsledky týkajúce sa stabilizátorov vrcholov vrcholovo-tranzitívnych grúp automorfizmov grafov. Neskôr sa sústredíme na polo-tranzitívne akcie grúp na 4-valentných grafoch. Štruktúra stabilizátorov takýchto akcií bola opísaná Marušičom a Nedelom v práci [76].

Šípovo-tranzitívne akcie

Pod šípom v grafe X rozumieme ľubovoľnú usporiadanú dvojicu susedných vrcholov X . Hovoríme, že grupa $G \leq \text{Aut}(X)$ má šípovo-tranzitívnu akciu na grafe X , ak indukovaná akcia G na množine šípov je tranzitívna. Klasický výsledok Tutta [94] dáva odhad $3 \cdot 2^4$ na veľkosť stabilizátora vrchola šípovo-tranzitívnej grupy majúcej akciu na súvislom kubickom grafe. Neskôr Sims [90, 91] a Wong [100] dokázali, že presne 5 grúp, menovite Z_3 , S_3 , D_{12} , S_4 and $S_4 \times Z_2$, sa môže vyskytnúť ako vrcholové stabilizátory takýchto akcií. Pre stupeň > 3 veľkosť vrcholových stabilizátorov je neohraničená. Na druhej strane, existuje mnoho výsledkov ohraničujúcich veľkosť stabilizátorov vybraných tried primitívnych akcií grúp funkciou stupňa vrchola [64, 65, 83, 86, 91, 97]. Uvedené výsledky naznačujú, že nasledovná hypotéza pochádzajúca od Simsa môže byť pravdivá:

Simsova hypotéza: „Veľkosť stabilizátorov vrcholov primitívnych vrcholovo-tranzitívnych akcií grúp na grafoch stupňa k je ohraničená funkciou k “.

Simsova hypotéza bola nakoniec potvrdená v práci Camerona, Praegerovej, Seitza a Saxla [13] použitím klasifikácie konečných jednoduchých neabelovských grúp. Ohraničenie závislé od stupňa je v prípade ľubovoľných tranzitívnych permutačných grúp a

dvojnásobne primitívnych stabilizátorov odvodené v prácach [45, 46]. Weiss [98] vyslovil hypotézu že, pokiaľ stabilizátor G_v vrchola v má primitívnu akciu na okolí vrchola v v šípovo-tranzitívnej akcii grupy G na súvislom grafe X , potom rád stabilizátora je ohraničený funkciou stupňa grafu X , pozri [85]. Redukcia uvedenej hypotézy na jednoduché grupy je urobená v práci [21].

Vďaka tomu, že Simsova hypotéza bola potvrdená, vznikol problém pre daný stupeň určiť konečnú množinu grúp, ktoré sa vyskytujú ako stabilizátory vrcholov príslušných akcií. Pre stupeň 2 je tento problém triviálny. Ako sme sa už zmienili, problém pre stupeň 3 bol rozriešený. Čo sa týka stupňa 4, horný odhad v tvare $2^4 3^6$ bol publikovaný v práci [65]. V nedávne publikovanej práci autorov Li, Lu, Marušič [67] sa nachádza zoznam desiatich grúp, ktoré sa môžu vyskytnúť ako stabilizátory vrchola primitívnej akcie grupy automorfizmov grafu stupňa 4. Z ich práce vyplýva, že ostré horné ohraničenie veľkosti stabilizátora je v tomto prípade $2^4 3^2$ a dosahuje sa na grupe $S_4 \times S_3$. Pre ďalšie stupne je známych len niekoľko špeciálnych výsledkov, riešenie problému v celej šírke je v nedohľadne.

Polo-šípovo-tranzitívne akcie grúp na grafoch stupňa 4

Súvislý hranovo-tranzitívny graf je vrcholovo-tranzitívny alebo bipartitný. Hranovo a vrcholovo tranzitívne akcie v indukovanej akcii na množine šípov majú najviac dve orbity. Jedna orbita znamená, že príslušná akcia je šípovo-tranzitívna. Takýmito akciami sme sa zaoberali v predošlom odseku. V prípade, že indukovaná akcia na množine šípov má dve orbity hovoríme o polo-šípovo-tranzitívnej akcii, alebo skrátene o polo-tranzitívnej akcii. Vo všeobecnosti štruktúra stabilizátorov vrcholov polo-tranzitívnych akcií grúp na súvislých grafoch nie je známa. Tutte však dokázal, že polo-tranzitívna akcia grupy na grafe X vynucuje v každom vrchole rovnaký párny stupeň k [96, strana 59]. V ďalšom sa preto budeme zaoberať najmenším netriviálnym prípadom $k = 4$. Polo-tranzitívne akcie na súvislých grafoch stupňa štyri nie sú primitívne a rád stabilizátora vrchola nie je ohraničený. Stabilizátor vrchola takejto akcie je vždy 2-grupa. Prírodnými kandidátmi sú elementárne abelovské 2-grupy a je skutočne ľahké vidieť, že lexikografický súčin $C_{h+1}[\bar{K}_2]$, $h > 2$, umožňuje polo-tranzitívnu akciu, ktorej stabilizátor vrchola je izomorfný Z_2^h . Konštrukcie polo-tranzitívnych grafov stupňa 4 s neabelovskými stabilizátormi sú obtiažnejšie. V skutočnosti z klasifikácie stabilizátorov odvodené Marušičom a Nedelom [76] vyplýva, že stabilizátor takejto akcie je takmer abelovská grupa, čo znamená, že trieda nilpotentnosti stabilizátora je najviac dva.

Teoréma 1. (Marušič, Nedela) (*Štruktúra stabilizátorov polo-tranzitívnych akcií grúp na grafoch stupňa 4.*) *Nech grupa G má polo-tranzitívnu akciu na súvislom grafe stupňa 4 so stabilizátorom vrchola H . Potom existujú prirodzené čísla h , d také, že $\frac{2}{3}h \leq d \leq h$, a množina generátorov $\langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_h \rangle$ grupy H splňajúce nasledovné vzťahy:*

$$(R1) \quad \tau_i^2 = 1 \text{ pre } i = 1, 2, \dots, h,$$

$$(R2) \quad (\tau_i \tau_j)^2 = 1 \text{ if } 0 < |i - j| < d,$$

$$(R3) \quad (\tau_i \tau_j)^2 = \tau_{h-d+i}^{\epsilon(j-i,0)} \tau_{h-d+i+1}^{\epsilon(j-i,1)} \cdots \tau_{(h-d+i)+2d-2h+j-1}^{\epsilon(j-i,2d-2h+j-1)}$$

pre všetky $1 \leq i < j \leq h$, kde $j - i \geq d$ a $\epsilon(r, s) \in \{0, 1\}$.

Navyššie $G = \langle a, H \rangle = \langle a, b \rangle$, pre nejaké $a \in G \setminus H$, $b = \tau_1 a$, pričom konjugácia prvkom a zobrazuje τ_i na τ_{i+1} , pre $i = 1, 2, \dots, h - 1$.

Na druhej strane, nech (G, H) je dvojica abstraktných grúp splňajúcich hore uvedené podmienky. Potom akcia G na ľavých zvyškových triedach podľa H je verná so súvislou nespárenou suborbitou dĺžky 2 a stabilizátorom vrchola H s výnimkou, keď $H \cong Z_2^h$ je normálna podgrupa G alebo ak $h = 1$, $H \cong Z_2$ a G je dihedralna.

Teoréma 2. (Marušič, Nedela) *Luboľná grupa H s prezentáciou v tvare*

$$H = \langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_h | (R1), (R2), (R3) \rangle$$

môže byť vnorená do stabilizátora vrchola grupy automorfizmov $\text{Aut}(X)_v$ vrcholovo-tranzitívneho grafu X stupňa 4. Z toho vyplýva, že $H \cong \bar{H} \leq \text{Aut}(X)$ a existuje $a \in \text{Aut}(X) \setminus \bar{H}$ také, že grupa $G = \langle a, \bar{H} \rangle$ je polo-šípovo tranzitívna na grafe X so stabilizátorom H .

Polo-tranzitívne grafy s predpísanou štruktúrou stabilizátora

Graf X sa nazýva polo-tranzitívny, ak grupa automorfizmov $\text{Aut}(X)$ má tranzitívnu akciu na vrcholoch a hranách grafu X , ale nie na šípoch grafu X . Väčšina známych polo-tranzitívnych grafov stupňa 4 má stabilizátor izomorfný grupe Z_2 . V práci [73] sú skonštruované polo-tranzitívne grafy stupňa 4 so stabilizátormi $Z_2 \times Z_2$. V práci Marušiča [74] sa nachádza konštrukcia polo-šípovo tranzitívnych grafov stupňa 4 s ľubovoľne veľkým elementárne abelovským stabilizátorom. Prvý príklad polo-tranzitívneho grafu stupňa 4 s neabelovským stabilizátorom (izomorfným dihedralnej grupe rádu 8) bol skonštruovaný s podporou počítača Conderom a Marušičom v práci [22]. Nasledovný problém ostáva otvorený.

Problém 1. *Existuje pre každú grupu H s prezentáciou v tvare*

$$H = \langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_h | (R1), (R2), (R3) \rangle$$

polo-tranzitívny graf stupňa 4 so stabilizátorom vrchola izomorfným grupe H ?

Polo-tranzitívne grafy s cyklickým stabilizátorom a chirálne hypermapy

Korešpondencia medzi regulárnymi mapami a polo-tranzitívnymi akciami grúp na grafoch stupňa 4 bola študovaná Marušičom a Nedelom v práci [75]. Táto korešpondencia úzko súvisí s pojmom mediálnej mapy a mediálneho grafu. Graf Y budeme nazývať $(G, \frac{1}{2}, H)$ -tranzitívny, ak existuje podgrupa $G \leq \text{Aut}(Y)$ majúca polo-tranzitívnu akciu na Y so stabilizátorom vrchola izomorfným grupe H . Orientovateľná regularita, reflexibilitnosť, pozitívna a negatívna dualita ustanovujú existenciu istých symetrií hypermáp na plochách. Napríklad, hypermapa \mathcal{H} je pozitívne samoduálna, ak existuje orientáciu zachovávajúci homeomorfizmus danej plochy na seba zobrazujúci \mathcal{H} na 0-2 duálnu hypermapu. Podrobnejšie sa symetriami máp a hypermáp budeme zaoberať v ďalšej časti.

V práci [8] sa nám podarilo zovšeobecniť výsledky z [75], pričom sme dokázali nasledovné tvrdenie.

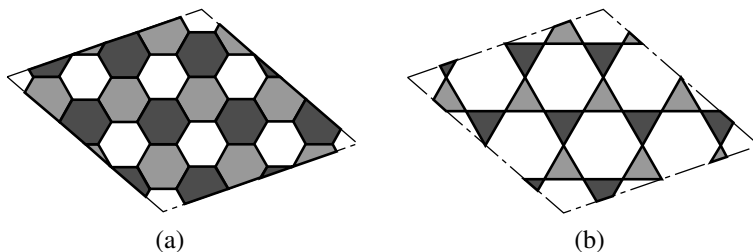
Teoréma 3. *Nech \mathcal{H} je, pre nejaké $k \geq 2$, k -hranovo-uniformná hypermapa na orientovateľnej ploche, nech $G = \text{Aut}^+ \mathcal{H}$ je orientáciu zachovávajúca grupa automorfizmov a $\mathcal{M} = \text{Med}(\mathcal{H})$ je mediálna mapa of \mathcal{H} s grafom Y . Potom platia nasledovné ekvivalencie*

1. \mathcal{H} je orientovateľne regulárna práve vtedy, ak Y je $(G, \frac{1}{2}, Z_k)$ -tranzitívny graf;
2. \mathcal{H} je regulárna reflexibilná práve vtedy, ak Y je $(G, \frac{1}{2}, Z_k)$ -tranzitívny a $(G_2, 1, Z_k \times Z_2)$ -tranzitívny pre nejakú grupu G_2 takú, že $G \leq G_2 \leq \text{Aut}(\text{Med}(\mathcal{H}))$;
3. \mathcal{H} je orientovateľne regulárna a pozitívne samo-duálna práve vtedy, ak Y je $(G, \frac{1}{2}, Z_k)$ -tranzitívna a $(G_3, 1, Z_{2k})$ -tranzitívna pre nejakú grupu G_3 takú, že $G \leq G_3 \leq \text{Aut}(\text{Med}(\mathcal{H}))$;

-
4. \mathcal{H} je orientovateľne regulárna a negatívne samo-duálna práve vtedy, ak Y je $(G, \frac{1}{2}, Z_k)$ -tranzitívny a $(G_4, \frac{1}{2}, D_k)$ -tranzitívny pre nejakú grupu G_4 takú, že $G \leq G_4 \leq \text{Aut}(\text{Med}(\mathcal{H}))$;
 5. \mathcal{H} je regulárna a samo-duálna práve vtedy, ak Y is $(G, \frac{1}{2}, Z_k)$ -tranzitívna a $(G_5, 1, D_{2k})$ -tranzitívna pre nejakú grupu G_5 , $G \leq G_5 \leq \text{Aut}(\text{Med}(\mathcal{H}))$.

3 Mapy a hypermapy daného rodu

Mapa je celulárna dekompozícia súvislej kompaktnej plochy. Regulárna hypermapa je kubická mapa, ktorej oblasti sú zafarbené tromi farbami tak, že oblasti incidentné tej istej hrane majú rôzne farby. Mapy odpovedajú hypermapám, v ktorých všetky oblasti jednej farby sú štvoruholníkové. Zafarbenie oblastí indukujú nasledovné (regulárne) zafarbenie hrán: ak e je hrana oddeľujúca oblasti zafarbené farbami c_1, c_2 , potom hranu e zafarbíme farbou c_3 komplementárnou k farbám c_1, c_2 . Izomorfizmy hypermáp sú izomorfizmy príslušného kubického grafu zachovávajúce zafarbenie hrán. Z uvedeného vyplýva, že grupa automorfizmov má semi-regulárnu akciu na množine vrcholov. V prípade, že akcia je regulárna, hypermapa sa nazýva regulárna. Hypermapa je orientovateľná, ak jej kubický graf je bipartitný. Orientovateľne regulárna hypermapa je hypermapa s bipartitným kubickým grafom, pričom jej grupa automorfizmov má tranzitívnu (regulárnu) akciu na každej partii. Regulárne a orientovateľne regulárne mapy je možné definovať pomocou prezentácie ich grupy automorfizmov. V regulárnej hypermape sú dĺžky hranice oblastí tej istej farby i ($i = 1, 2, 3$) rovnaké, povedzme $2m_i$. Usporiadanú trojicu čísel (m_1, m_2, m_3) nazývame typom hypermapy. Šesť permutácií farieb umožňuje z danej mapy vytvoriť 6 vzájomne duálnych hypermáp. Ak jedno z čísel m_i je ≤ 2 , tak ho vynecháme a hovoríme, že daná hypermapa je mapa typu $\{m, k\}$, kde m, k sú zvyšné dva parametre. Na Obrázku 1 je orientovateľne regulárna hypermapa rodu 1 typu $(3, 3, 3)$ pochádzajúca z Fanovej projektívnej roviny.



Obr. 1: Regulárne vnorenie Fanovej roviny do toru.

Orientovateľne regulárne hypermapy rodu najviac 2

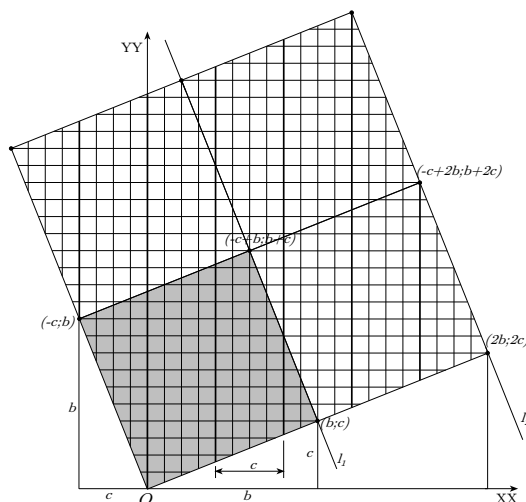
Z Hurwitzovho ohraničenia vyplýva, že rád orientáciu zachovávajúcej diskkrétnej grupy automorfizmov plochy rodu $g > 1$ je najviac $84(g - 1)$. Grupa automorfizmov orientovateľne regulárnej mapy rodu $g > 1$ je špeciálnou diskkrétou grupou automorfizmov plochy, preto jej rád je tiež ohraničený $84(g - 1)$. Z toho vyplýva, že existuje len konečne mnoho orientovateľne regulárnych máp daného rodu $g > 1$. Každá regulárna mapa na orientovateľnej ploche je aj orientovateľne regulárna a regulárnu mapu na neorientovateľnej ploche Eulerovej charakteristiky χ antipodálne nakrýva nejaká regulárna mapa na orientovateľnej ploche charakteristiky 2χ (pozri napríklad [81, Sekcia 7]). Preto regulárnych máp na plochách charakteristiky $\chi < 0$ môže byť len konečne mnoho.

Nasledovný klasifikačný problém je jedným z centrálnych problémov v teórii máp a hypermáp.

Problém 2. *Klasifikujte (orientovateľne) regulárne hypermapy na danej kompaktnej ploche.*

Použitím Eulerovej formuly možno ľahko zistiť, že sférické (orientovateľne) regulárne hypermapy pozostávajú z piatich Platónskych telies a dvoch triviálnych nekonečných množín máp typov $(1, n, n)$, $(2, 2, n)$ a ich duálov (hviezdy, cykly a dipóly). Z nich mapy typu $(2, 2, n)$ pre n párne, ikosaeder, dodekaeder, kocka a oktaeder sú antipodálne mapy. Ich polovičné kvocienty tvoria zoznam regulárnych hypermáp na projektívnej rovine.

Orientovateľne regulárne mapy rodu 1 sú klasifikované v monografii Coxetera a Mosera [24]. Zovšeobecnenie na hypermapy bolo urobené Cornom a Singermanom [23]. Až na dualitu existujú 3 nekonečné množiny hypermáp typov $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$ and $(3, 3, 3)$. Obrázok 2 naznačuje spôsob, akým vznikajú orientovateľne regulárne mapy typu $\{4, 4\}$. V prácach [4, 5] je rozriešený problém klasifikácie orientovateľne regulárnych hypermáp rodu 2. Pre plochy vyšších rodov sú známe len čiastkové výsledky. Napríklad, v práci [6] sú opísané zrkadlovo asymetrické orientovateľne regulárne hypermapy rodu najviac 4. Z regulárnych hypermáp rodu 1 nie je ani jedna antipodálna. Z toho vyplýva známy fakt, že na Kleinovej fľaši neexistuje regulárna hypermapa.



Obr. 2: Torická orientovateľne regulárna mapa $\{4, 4\}_{b,c}$ vzniká ako faktorová mapa univerzálnej mapy typu $\{4, 4\}$

Regulárne mapy daného rodu

V tejto podsekcii sa budeme zaoberať nasledovným problémom.

Problém 3. *Pre danú plochu S klasifikujte (orientovateľne) regulárne mapy na S .*

Sherk v práci [89] opísal všetky orientovateľne regulárne mapy rodu 3. Grek v prácach [48, 49, 50, 51] klasifikoval (orientovateľne) regulárne mapy na orientovateľných a neorientovateľných plochách Eulerovej charakteristiky ≥ -4 . Garbe v prácach [44] a

[3] rozriešil klasifikačný problém pre orientovateľné plochy rodu najviac 7 a neorientovateľné plochy rodu najviac 8. Najďalej sa dostali Conder and Dobcsányi [18], ktorí s podporou počítača získali zoznam orientovateľne regulárnych máp rodu najviac 15.

Problém existencie

Nasledujúc MacLachlana [72] (pozri tiež [1]) označme $\mu(g)$ rád najväčšej diskretnej grupy komformných zobrazení (automorfizmov) kompaktnej Riemannovej plochy rodu g . Z Riemann-Hurwitzovej rovnosti vyplýva vyššie zmienené ohraničenie funkcie $\mu(g) \leq 84(g-1)$. Hurwitzova hranica sa nadobúda vtedy, a len vtedy ak existuje orientovateľne regulárna mapa typu $\{7, 3\}$ rodu g , tzv. Hurwitzova mapa. Všetky Hurwitzove mapy rodu < 10000 opísal Conder, najmenšia z nich má rod 3. Zo zoznamu vyplýva, že pre mnoho rodov Hurwitzove mapy neexistujú, a teda pre niektoré množiny plôch možno Hurwitzovu hranicu zlepšiť. Nasledovná veta bola dokázaná nezávisle Accolom [1] a MacLachlanom [72].

Teoréma 4. (Accola, MacLachlan [72, 1]) *V uvedenom označení platí*

$$8(g+1) \leq \mu(g) \leq 84(g-1), \text{ pričom } g \geq 2.$$

Existuje nekonečne veľa rodov $g \geq 2$, pre ktoré platí $\mu(g) = 8(g+1)$.

Z korešpondencie medzi hypermapami a Riemannovými plochami dostaneme, že existuje nekonečne veľa plôch S takých, že rád orientovateľne regulárnej hypermapy na S je najviac $8(g+1)$. Na druhej strane, rád orientovateľne regulárnej mapy je aspoň $4g$. Preto sa rád orientovateľne regulárnej mapy na MacLachlanovej ploche pohybuje v intervale $4g$ až $8(g+1)$.

Pokiaľ v orientovateľnom prípade bukét $2g$ kružníc možno nakresliť na ploche rodu g tak, že vytvoríme regulárnu mapu, hľadanie regulárnych máp na neorientovateľných plochách ukazuje, že existujú neorientovateľné plochy, na ktorých nie je možné nakresliť regulárnu mapu. Breda and Wilson dokázali v práci [99] nasledovné tvrdenie.

Teoréma 5. (Breda, Wilson [99]) *Nech g je celé číslo, $1 \leq g \leq 52$. Regulárna hypermapa na neorientovateľnej ploche rodu g existuje vtedy a len vtedy, ak g je rôzne od 2, 3, 18, 24, 27, 39 alebo 48.*

Na druhej strane, Conder and Everitt [20] pokryli konštrukciami regulárnych máp okolo 75 percent neorientovateľných rodov. V rovnakej práci sformulovali nasledovný problém.

Problém 4. *Existuje nekonečne veľa neorientovateľných plôch, na ktorých nie je žiadna regulárna mapa?*

Výsledok dokázaný v práci [11] predstavuje prielom v problematike klasifikácie regulárnych máp na neorientovateľných plochách. Obsahuje úplnú klasifikáciu regulárnych máp prvočíselnej negatívnej Eulerovej charakteristiky. Ako vedľajší produkt, sme získali riešenie horeuvedeného problému. Nasledovná veta vysloví náš výsledok v zhustenej enumeračnej podobe. Pre prirodzené číslo $p \equiv -1 \pmod{4}$ označme $\nu(p)$ počet dvojíc nepárnych prirodzených čísel (j, l) , $j > l \geq 3$, ktoré sú riešeniami rovnice $(j-1)(l-1) = p+1$.

Teoréma 6. (Breda, Nedela, Širáň [11]) *Nech p nepárne prvočíslo, $p \neq 7, 13$, a nech \mathcal{N}_{p+2} je neorientovateľná plocha Eulerovej charakteristiky $-p$ (rodu $p+2$).*

- (1) *Ak $p \equiv 1 \pmod{12}$, potom neexistuje regulárna mapa na ploche \mathcal{N}_{p+2} .*
- (2) *Ak $p \equiv 5 \pmod{12}$, potom, až na izomorfizmus a dualitu, existuje presne jedna regulárna mapa na \mathcal{N}_{p+2} .*

- (3) Ak $p \equiv -5 \pmod{12}$, potom, až na izomorfizmus a dualitu, existuje $\nu(p)$ regulárnych máp na \mathcal{N}_{p+2} .
- (4) Ak $p \equiv -1 \pmod{12}$, potom, až na izomorfizmus a dualitu, existuje presne $\nu(p) + 1$ regulárnych máp na \mathcal{N}_{p+2} .

Dôsledok 7. *Neexistujú regulárne mapy Eulerovej charakteristiky $-p$, kde p je prvočíslo $\equiv 1 \pmod{12}$, $p > 13$. Špeciálne, existuje nekonečne veľa plôch na ktorých nie je žiadna regulárna mapa.*

Je možné uvažovať modifikácie klasifikačného a existenčného problému.

Napríklad, v práci [6] sú klasifikované zrkadlovo asymetrické orientovateľne regulárne hypermapy rodu najviac 4. Takéto hypermapy budeme nazývať chirálne. Hlavný výsledok v [6] implikuje, že neexistuje chirálna hypermapa rodu 2 a existuje jediná (až na dualitu) chirálna hypermapa rodu 3 a rodu 4.

Prezretím zoznamu orientovateľne regulárnych máp rodu najviac 15 [18] možno zistiť, že neexistujú chirálne mapy rodu 2, 3, 4, 5, 6, 9 a 13.

Zlepšovanie Hurwitzovho odhadu

Vyššie uvedené výsledky Accolu, McLachlana, Condera a ďalších naznačujú, že pre vhodné množiny Riemannových plôch možno Hurwitzov odhad $84(g-1)$, $(168(g-1))$ veľkosti diskretnéj grupy automorfizmov zlepšiť. V nedávno publikovanej práci [19] sa nachádza diskusia na túto tému v prípade neorientovateľných plôch. Autori nazývajú diskretnú grupu automorfizmov neorientovateľnej kompaktnéj plochy veľkou, ak jej rád je $> 4(-\chi)$. Každá taká grupa, je konečným kvocientom Kleinovej grupy istej signatúry. Riemann-Hurwitzova formula zužuje diskusiu na niekoľko možných signatúr, pričom netriviálne prípady odpovedajú grupám automorfizmov regulárnych máp a hypermáp typov $(k, m, 3)$, $k \geq m \geq 3$; $(k, m, 4)$, $-\chi > k \geq m \geq 4$ a $(k, m, 5)$, $9 \geq k \geq m \geq 5$. Ak $-\chi$ je prvočíslo, potom nasledovná teorema klasifikuje veľké grupy automorfizmov odpovedajúce hypermapám.

Teorema 8. (Jones, Nedela [58]) *Nech G je grupa automorfizmov regulárnej hypermapy typu (k, m, n) , $k \geq m \geq n \geq 3$ majúca akciu na ploche charakteristiky $\chi = -p$, kde p je nepárne prvočíslo. Ak $k \geq m \geq n = 3, 4$ alebo 5, potom buď*

- (i) $G \cong L_2(7)$, $p = 7$ a $[k, m, n] = [4, 3, 3]$ s redukovanou prezentáciou $\langle r, s \mid r^4 = s^3 = (rs)^3 = (rs^{-1})^4 \rangle$, alebo
- (ii) $G \cong PGL_2(5) \cong S_5$, $p = 23$ a $[k, m, n] = [6, 5, 4]$ s redukovanou prezentáciou $\langle r, s \mid r^6 = s^5 = (rs)^4 = 1, (rs^{-1})^2 = rsr^{-2}s^2r^{-1}s^{-1} = 1 \rangle$.

V oboch prípadoch existuje jediná akcia G , až na ekvivalenciu.

Klasifikáciou veľkých grúp automorfizmov majúcich akciu na orientovateľných plochách rodu $g = p + 1$, kde p je prvočíslo, sa zaoberali Belolipetsky and Jones v [2]. Množina veľkých grúp je tu identifikovaná nerovnosťou $|G| > 6p$.

Fenoméni chiralít map a hypermáp

Pojem chirálnosti bol zavedený Williamom Thompsonom, ktorý bol známy pod menom Lord Kelvin, ako vlastnosť geometrického objektu, ktorá vzniká "keď jeho obraz v zrkadle, ideálne realizovaný, nemôže byť prenesený do koincidencie samého so sebou". Vo vede sa tento fenomén vyskytuje často. Napríklad biológovia a chemici objavili molekuly, ktoré existujú v dvoch rozlíšiteľných formách (enantiomers), pričom jedna je zrkadlovým obrazom druhej. Podobne sa tento fenomén objavuje v kvantovej mechanike, a všeobecne, v teoretickej fyzike.

Uvedené fakty nám dávajú silnú motiváciu k štúdiu chiralít matematických modelov reálnych štruktúr. Monohé z týchto modelov sú grafy vnorené do Euklidovského

priestoru alebo do priestorov so zložitejšou štruktúrou. Napríklad fullerény (nedávno objavené karbónové molekuly) sú modelované trivalentnými polyedrami s päťuholníkovými a šesťuholníkovými oblasťami. Toto sú špeciálne príklady máp. Matematická história máp sa tiahne od platónskych a archimedovských telies cez teorému o farbeniach máp až po ich nedávnu reinkarnáciu v podobe Grothendieckových "dessin d'enfants" - kombinatorických reprezentácií Riemannových plôch definovaných nad algebraickými číselnými poľami.

Budme trochu presnejší: automorfizmus mapy je automorfizmus jej grafu, ktorý možno rozšíriť na homeomorfizmus danej plochy na seba. Automorfizmy máp sa delia do dvoch tried: orientáciu zachovávajúce a orientáciu meniace automorfizmy. Hovoríme, že mapa je chirálna, ak nepripúšťa orientáciu meniaci automorfizmus. Uvedené pojmy sa prirodzeným spôsobom zovšeobecňujú na hypermappy. Hoci fenomén chiralít sa vyskytuje v mnohých úvahách o mapách, pozri napríklad monografiu Coxetera a Mosera [24], doteraz nebolo urobené detailné štúdium tohoto fenoménu. Naším cieľom bolo preskúmať fenomén chirálnosti máp, odvodiť invarianty umožňujúce merať chirálnosť máp ako číselnú charakteristiku a klasifikovať chirálne mapy malých rodov s maximálnym počtom symetrií.

Tieto ciele sa nám podarilo dosiahnuť v sérii prác. V práci [10] je budovaná teória chirálnych máp, práce [9], [6] obsahujú klasifikáciu orientovateľne regulárnych chirálnych máp a hypermáp rodu najviac štyri. V práci [7] sú odvodené vzorce na výpočet chirálnej grupy a chirálneho indexu Coxeterových máp. V práci [10] sa nachádza čiastková odpoveď na otázku, týkajúcu sa štruktúry chirálnych grúp.

Enumerácia máp a hypermáp daného rodu

Enumerácia máp na plochách sa zaoberá problémami nasledovného typu

Problém 5. *Kolko existuje máp spĺňajúcich danú vlastnosť a majúcich daný počet hrán?*

Počiatky enumeratívnej teórie máp sú spojené s enumeráciou stromov, ktorá bola riešená v 60-tych rokoch Tutteom [95], Hararym, Prinsom a Tutteom [52], pozri tiež [53, 68]. Neskôr boli uvažované ďalšie triedy máp vrátane triangulácií, vonkajškovo-planárnych máp, kubických máp, Eulerovských máp, jednoduchých máp, máp s dvomi oblasťami a podobne. Hoci dodnes bolo publikovaných viac než 100 vedeckých prác o enumerácii máp, väčšina z nich sa zaoberá enumeráciou koreňových máp. Len málo prác sa zaoberá enumeráciou nezakorenených máp rodu viac ako jedna. Enumeračné vzorce pre triedy izomorfizmov planárnych máp boli odvodené v prácach Liskovca a Wormalda [69, 70, 101, 102, 71]. Naším cieľom bolo odvodiť enumeračné vzorce pre mapy a hypermappy vyšších rodov. Tento cieľ sa nám podarilo naplniť v prácach [77], [78]. Konkrétne sme sa zaoberali nasledovným problémom.

Problém 6. *Určte počet $H_g(n)$ tried izomorfizmov orientovaných nezakorenených máp (hypermáp) daného rodu g s daným počtom hrán n ?*

V prácach [77], [78] sme odvodili vzorce na výpočet $H_g(n)$ používajúce počty $h_\gamma(m)$ koreňových máp rodov $\gamma \leq g$ s m hranami, kde $m \leq n$. Explicitné vzorce boli odvodené pre $g = 1, 2, 3$ v prípade máp, a pre $g = 1$ v prípade hypermáp. Pre vyššie rody nie sú vo všeobecnosti známe ani počty koreňových máp a hypermáp, takže konkrétne čísla nie je možné určiť. Čísla $H_g(n)$ a $h_g(n)$ majú peknú grupovo-teoretickú interpretáciu v jazyku Fuchsovských grúp. V prípade máp, $h_g(n)$ značí počet podgrúp indexu n a rodu g univerzálnej Fuchsovskej grupy $\langle x, y | y^2 = 1 \rangle \cong Z * Z_2$, zatiaľčo $H_g(n)$ značí počet tried konjugácií takýchto podgrúp. V prípade hypermáp je univerzálnou grupou voľná 2-generovaná grupa.

4 Regulárne vnorenia grafov do plôch

Vnorenie $i : K \rightarrow S$ súvislého grafu K do kompaktnéj súvislej plochy S nazývame bunečné, ak komponenty súvislosti (oblasti) $S - i(K)$ sú homeomorfné otvorenému disku. Každé bunečné vnorenie grafu teda definuje mapu a naopak, každú mapu možno opísať ako bunečné vnorenie nejakého grafu. Vnorenie grafu budeme nazývať regulárne, ak odpovedajúca mapa je regulárna, prípadne orientovateľne regulárna. V tejto sekcii nás bude zaujímať nasledovný všeobecne formulovaný problém.

Problém 7. *Pre danú triedu grafov klasifikujte regulárne vnorenia týchto grafov.*

S horeuvedeným problémom úzko súvisí nasledovná otázka.

Problém 8. *Ktoré grafy možno regulárne vnoriť do nejakej plochy?*

Je zrejmé, že grafy pripúšťajúce regulárne vnorenia musia byť vysoko-symetrické, presnejšie, akcia grupy automorfizmov príslušnej mapy je šípovo-tranzitívna. Na druhej strane, James a Jones [57] použitím Zassenhausovej vety klasifikovali orientovateľne regulárne vnorenia K_n . Z klasifikácie vyplýva, že takéto vnorenia existujú len ak n je mocninou prvočísla. Problém 2 bol rozriešený v práci Gardinera, Nedelu, Širáňa a Škovieru odvodením nutnej a postačujúcej podmienky Sabidussiho typu [47].

Problém 1 bol študovaný pre rôzne triedy grafov. V rámci riešenia tohoto projektu sme úspešne klasifikovali regulárne vnorenia kompletých bipartitných grafov $K_{n,n}$, ak n je mocnina prvočísla a pre mnohé ďalšie prirodzené čísla n , [59], [41] and [42]. Špeciálne, ak $n = p$ je prvočíslo, tak existuje jediné regulárne vnorenie $K_{p,p}$, pozri [82]. Klasifikácia regulárnych vnorení $K_{n,n}$ úzko súvisí s problémom charakterizovať grupy, ktoré sú súčinní dvoch cyklických grúp (pozri [60]). Poznamenajme, že týmto dodnes otvoreným problémom sa zaoberajú odborníci v teórii grúp od 50-tych rokov minulého storočia. Práca [39] sa zaoberá klasifikačným problémom pre všeobecnejšiu triedu grafov - kompleté multipartitné grafy.

Iná trieda grafov, ktorou sme sa zaoberali boli n -dimenzionálne kocky Q_n . Klasifikačný problém sme úspešne vyriešili pre nepárne n v práci [40]. Pokiaľ uvažovaná plocha S je neorientovateľná, tak takéto vnorenia pre $n > 2$ neexistujú [66]. Napokon v práci [38] sme rozriešili klasifikačný problém pre grafy s pq vrcholmi. Klasifikácia regulárnych vnorení týchto grafov vyžaduje analýzu štruktúry maximálnych podgrúp dvojdimenzionálnych projektívnych grúp nad konečnými poliami s p prvkami.

5 Steinerovské systémy trojíc a rozklady K_n na faktory stupňa 2

Známy "Oberwolfach problem" prvý krát formulovaný Ringelom počas stretnutia v Oberwolfachu v roku 1967 sa pýta na 2-faktorizáciu kompletného grafu K_{2n+1} takú, že každý jej 2-faktor je izomorfný predpísanému 2-faktoru Q . Ak komponenty Q sú cykly dĺžok c_1, \dots, c_s ($\sum c_i = 2n + 1$), potom odpovedajúci problém označíme $OP(2n + 1; c_1, \dots, c_s)$. Oberwolfach problém bol úplne vyriešený v prípade, keď všetky komponenty Q sú cykly rovnakej dĺžky. Všeobecný prípad ostáva otvorený. Existuje hypotéza, že riešenie $OP(2n + 1; c_1, \dots, c_s)$ vždy existuje s výnimkou prípadov $OP(9; 4, 5)$ a $OP(11; 3, 3, 5)$, ktoré nemajú riešenie. Spomedzi mnohých zovšeobecnení sme uvažovali špeciálny prípad tzv "Hamilton-Waterloo" problému. Tento problém sa pýta na 2-faktorizáciu K_{2n+1} , kde r 2-faktorov je isomorfných danému 2-faktoru Q a s 2-faktorov je isomorfných danému 2-faktoru R , pričom $r + s = n$. V našej práci [55] sme sa sústredili na prípad, keď Q je trojuholníkový faktor a R je hamiltonovský cyklus. Z podmienok deliteľnosti vyplýva, že pokiaľ v dekompozícii existuje aspoň jeden trojuholníkový 2-faktor, tak počet vrcholov je $6k + 3$, pre nejaké prirodzené číslo k .

V danom prípade, je inštancia problému určená počtom hamiltonovských cyklov s vo faktorizácii, pričom predpokladáme, že $3k + 1 \geq s > 0$. Dokázali sme, že ak pre s platí $\frac{n+3}{6} \leq s \leq \frac{n-1}{2}$, tak riešenie existuje. Navyše, ak $n = 6k + 3$, a $k \equiv 1 \pmod{3}$, tak vieme nájsť riešenie vo všetkých prípadoch s výnimkou $s = 1$. Pre niektoré špeciálne geometrické postupnosti $n = a \cdot 3^m$, kde $a \in \{5, 7, 13, 19\}$ existuje riešenie, pre každé prípustné s , vrátane $s = 1$. Na druhej strane, jediný známy prípad, ktorý nemá riešenie je $n = 9$ a $s = 1$. To nás priviedlo k nasledovnej hypotéze.

Hypotéza 1. *Nech $n = 6k + 3$, $n \geq 15$. Potom, pre každé s , $3k + 1 \geq s \geq 1$ existuje rozklad K_n na s hamiltonovských cyklov a $3k + 1 - s$ trojuholníkových 2-faktorov.*

Steinerovský systém trojíc $S = STS(v)$ je dvojica (V, B) , kde V množina v bodov a B je množina trojprvkových podmnožín množiny V , nazývaných trojice alebo bloky, splňujúca nasledovnú podmienku: každá dvojica bodov x, y je obsiahnutá v práve jednej trojici. Je známe, že Steinerovský systém trojíc s v vrcholmi existuje práve vtedy, ak $v \equiv 1$ alebo $3 \pmod{6}$. Bloková farebná trieda je množina po dvoch disjunktných trojíc. Ofarbenie blokov m farbami je rozklad množiny blokov na m farebných tried. Chromatický index $\chi'(S)$ je najmenšie prirodzené číslo m , pre ktoré existuje ofarbenie blokov systému S m farbami. Použitím Brooksovej vety ľahko odvodíme ohraničenie $\chi'(S) \leq 3(v-3)/2$ pre $v > 7$. Zrejme dolné ohraničenia sú $\chi'(S) \geq (v-1)/2$ pre $v \equiv 3 \pmod{6}$, $\geq (v+1)/2$ pre $v \equiv 1 \pmod{6}$. Dolné ohraničenie $\chi'(S) = (v-1)/2$ sa dosahuje vtedy a len vtedy, ak Steinerovský systém trojíc je riešiteľný.

Steinerovský systém trojíc $S = STS(v)$ sa nazýva cyklický, ak existuje automorfizmus S cyklicky permutujúci jeho množinu vrcholov. Nadväzujúc na prácu Colbourn a Colbournovej sme v práci [79] odvodili lepšie horné ohraničenia pre chromatický index cyklických Steinerovských systémov trojíc. Tento výsledok je založený na určení presných hodnôt chromatického čísla cirkulantov stupňa 6.

Označme \min_v hore-uvedené dolné ohraničenie. Tvrdenie Pippengera a Spencera dokázané vo všeobecnom kontexte hypergrafov ukazuje, že chromatický index Steinerovského systému trojíc je asymptoticky \min_v . Tiež nie sú známe príklady $STS(v)$ s chromatickým indexom väčším od \min_v , o viac ako 2. To nás vedie k nasledovnej hypotéze.

Hypotéza 2. *Chromatický index cyklického $STS(v)$, $v > 7$, sa rovná jedenej z hodnôt \min_v , $\min_v + 1$, $\min_v + 2$.*

6 Postupnosti excentricít v grafoch

Excentricita $exc(v)$ vrchola v daného grafu je maximum zo vzdialeností $d(v, w)$, kde maximum sa berie cez všetky vrcholy w . Postupnosť excentricít grafu sa nazýva minimálna, ak neobsahuje žiadnu vlastnú podpostupnosť, ktorá je postupnosťou excentricít nejakého grafu. Graf sa nazýva minimálny, ak realizuje nejakú minimálnu postupnosť excentricít. V práci [54] sa študujeme vlastnosti minimálnych grafov a minimálnych postupností excentricít. Napríklad sme dokázali, že graf polomeru r a priemeru $d \leq 2r - 2$ s aspoň $3r - 2$ vrcholmi obsahuje cyklus dĺžky $2r$ alebo $2r + 1$. V práci [56] sme študovali postupnosti excentricít, ktoré obsahujú práve dve hodnoty. Opísali sme všetky minimálne postupnosti typu $(4^\alpha, 5^\beta)$ a sformulovali sme hypotézu o minimálnych postupnostiach typu $(r^\alpha, (r+1)^\beta)$.

7 Uloženia grafov do mriežok dimenzie 1 a 3

Vo svojej práci sme sa zamerali na výskum jedno- a trojrozmerných uložení grafov.

Jednorozmerné (lineárne) uloženie grafu je také jeho nakreslenie, kde vrcholy grafu sú uložené na línii v nejakom poradí a hrany grafy sú kreslené nad ním ako oblúky

prípadne lomené čiary. Uložením vrcholov grafu na líniu v nejakom poradí a priradením poradových čísel jednotlivým pozíciám dostávame očíslovanie vrcholov grafu. Množstvo problémov sa dá modelovať ako problém číslovania vrcholov grafu. My sa sústreďujeme na jeden z nich - antibandwidth. Problém antibandwidth je definovaný ako problém nájdenia takého lineárneho uloženia, kde je dĺžka najkratšej hrany maximalizovaná. Dĺžkou hrany v lineárnom uložení rozumieme rozdiel čísel (pozícií v lin. uložení) jej koncových vrcholov. Problém je NP-úplný a polynomiálne algoritmy sú známe len pre doplnky "threshold a arborescent comparability" grafov. Z pohľadu teoretickej informatiky sú významné grafy reprezentujúce komunikačné siete. Vo svojej práci [87] sme odvodili presné hodnoty antibandwidth pre niektoré typické siete ako sú napríklad mriežky, toroidálne mriežky a hyperkocky. Pojem ďalej rozširujeme na cyklický antibandwidth, kde skúmame uloženie nie v línii, ale v cykle, a takisto poskytujeme presné hodnoty pre spomenuté siete. Doterajšie výsledky práce boli prezentované na Československej konferencii o teórii grafov a na zahraničnej konferencii ICGT 2005 v Hyères, vo Francúzsku, kde bol aj publikovaný rozšírený abstrakt v čísle Electronic Notes on Discrete Mathematics. Plná verzia bola zaslaná do časopisu Discrete Applied Mathematics.

Trojrozmerné uloženia grafov súvisia s návrhom trojrozmerných VLSI obvodov. V klasickom VLSI obvode sú jeho prvky (tranzistory) a spojenia medzi nimi umiestnené na ploche. Pri trojrozmernom návrhu takýto obvod môže vyzeráť napríklad tak, že jeho prvky ponecháme na ploche, ale spojenia medzi nimi budeme viesť v priestore nad plochou s prvkami. Vo všeobecnosti môžu prvky obvodu byť umiestnené ľubovoľne v priestore a spojenia medzi nimi sú vedené priestorovo. Trojrozmerný návrh takéhoto obvodu so sebou prináša niekoľko výhod. Hlavnou výhodou je kompaktnosť takéhoto obvodu - výsledok je "menší" ako jeho dvojrozmerná verzia, skrácujú sa spojenia medzi prvkami, čo znižuje náklady a urýchľuje výrobu takéhoto obvodu. Ďalšou výhodou je možnosť kombinovať viac typov obvodov do jedného návrhu - funkčnosť môže byť rozdelená napríklad po vrstvách. V teoretickej rovine skúmame vlastnosti trojrozmerných uložení na základe modelov. V modeli s jednou aktívnou vrstvou sú vrcholy reprezentované ako štvorce s hranami dĺžky d , kde d je stupeň vrhola. Hrany sú vedené v priestore nad vrcholmi tak, že sa môžu vzájomne pretínať v jednom bode, ale nie prelínať na určitom nenulovom úseku. Vo všeobecnom modeli reprezentujeme vrchol ako kocku o strane d . Na umiestnenie vrcholov v priestore nie sú kladené žiadne podmienky. Hrany sú vedené pravouhlým spôsobom, za dodržania tých istých podmienok, ako pre model s jednou aktívnou vrstvou. V našej práci [92] sa zaoberáme objemom uloženia hyperkocky v oboch spomínaných modeloch. Svojimi výsledkami vylepšujeme prácu [12]. Naše výsledky boli prezentované na konferencii Graph Drawing 2004 v New Yorku a publikované v jej zborníku. Postupy aplikované pre hyperkocku sme zovšeobecnilí pre produktové grafy, kde faktor grafy sú niektoré známe siete. Dosiahnuté výsledky boli prezentované na konferencii SOFSEM 2005 a publikované v jej zborníku [93].

8 Kryštalizácie topologických 3-variet rodu 2

Topologická 3-varieta je kompaktný súvislý separovateľný metrický priestor taký, že pre každý jeho bod existuje otvorené okolie homeomorfné E^3 . Najjednoduchším príkladom je 3-sféra S^3 . Známa hypotéza Poincarého ustanovuje, že S^3 je jediná jednoducho súvislá 3-varieta. Všeobecne, problém homeomorfizmu 3-variet je veľmi ťažký. Pezdana dokázal [84], že každú orientovateľnú topologickú 3-variету možno reprezentovať 4-hranovo-ofarbeným bipartitným grafom stupňa 4. Tieto grafy sa nazývajú kryštalizácie. Problém spočíva v nejednoznačnosti reprezentácie. Ferri a Galiardi [43] zdefinovali reláciu ekvivalencie na kryštalizáciách, ktorá odpovedá relácii homeomorfizmu reprezentovaných variet. Neskôr Grasselli a Casali [14] ukázali, že každú orientovateľnú

3-varietu Heegaardovho rodu g možno reprezentovať kryštalizáciou, ktorej štruktúru možno určiť $2g + 2$ -ticou prirodzených čísel. Bohužiaľ, ani táto špeciálna reprezentácia nie je jednoznačná.

V rámci riešenia projektu sme sa zamerali na 3-varietu Heegaardovho rodu 2, ktorých klasifikácia nie je známa. V práci [61] uvažujeme aproximácie relácie ekvivalencie na šiesticiach prirodzených čísel reprezentujúcich 3-varietu Heegaardovho rodu 2. Naším cieľom bolo zostaviť katalóg malých 3-variet rodu 2 a rozlíšiť ich až na homeomorfizmus. Toto úsilie sa podarilo zavrieť v prácach [62, 63], kde sme použitím fundamentálnej grupy a odvodených invariantov zostavili katalóg 3-variet rodu 2 reprezentovaných kryštalizáciami s najviac 42 vrcholmi. Zoznam zahrňuje 78 nerozložiteľných 3-variet rodu dva, z nich je 39 eliptických, 4 Euklidovské a 35 3-variet ďalších typov.

9 Prirodzené duality

Typický prístup používaný v algebre je reprezentovať abstraktné štruktúry pomocou iných konkrétnejších štruktúr. Štandardnými príkladmi sú Cayleyho reprezentácia grúp, Birkhoff-Wittenova reprezentácia Lieových algebier, Wedderburn-Artinova reprezentácia konečných okruhov, Stoneova reprezentácia Booleových algebier a Priestleyovej reprezentácia distributívnych zväzov. Existuje fundamentálny rozdiel medzi prvými tromi reprezentáciami a poslednými dvoma. V Cayleyho reprezentácii grupy ako grupy permutácií nejakej množiny platí, že ak si zapamätáme iba túto množinu, nie sme schopní zrekonštruovať späť danú grupu. Naproti tomu v Priestleyovej reprezentácii distributívneho zväzu ako zväzu obojetných horných koncov usporiadaného booleovského priestoru platí, že ak si zapamätáme iba daný booleovský priestor, sme schopní zrekonštruovať späť aj daný distributívny zväz. Stoneova a Priestleyovej reprezentácia majú významnú výhodu v tom, že problémy týkajúce sa pôvodnej algebry môžu byť riešené bez straty informácie tým, že sa skúma príslušný booleovský priestor resp. usporiadaný booleovský priestor. Tento prístup sa aj štandardne využíva pri skúmaní booleovských algebier a distributívnych zväzov. Takéto reprezentácie sú príkladom prirodzených dualít. Dá sa povedať, že tak ako logaritmus konvertuje zložitý problém násobenia kladných reálnych čísel na oveľa jednoduchší problém sčítovania reálnych čísel, prirodzená dualita má schopnosť konvertovať zložitý problém v triede algebier na oveľa jednoduchší problém v triede iných (topologických) štruktúr.

Teória prirodzených dualít sa týka topologickej reprezentácie algebier. Dáva nám uniformný spôsob reprezentácie každej algebry v danej kvazivariete ako algebry spojitých štruktúru-zachovávajúcich funkcií. Taktiež príklady špeciálnych algebier možno nájsť skonštruovaním objektov s požadovanými vlastnosťami v duálnej kategórii.

Prirodzené duality boli použité na riešenie problémov v tak rozdielnych oblastiach ako sú logika a teoretická fyzika. (Kapitola 5 monografie Clark and Davey [16] prezentuje úplne detailne množstvo netriviálnych aplikácií teórie.) Teória prirodzených dualít má však nielen dôležité aplikácie, ale je to aj svojou povahou pekná a hlboká oblasť matematiky. Možno preto pozorovať zväčšujúci sa záujem o porozumenie prirodzeným dualitám na teoretickej úrovni. Teória prirodzených dualít je v súčasnosti jedným z hlavných výskumných smerov v univerzálnej algebre.

Základy teórie boli položené v roku 1980 v 175-stranovej práci Davey and Werner [37]. Teória vyrástla ako všeobecná teória dualít pre algebraické štruktúry z dvoch klasických špeciálnych prípadov rozvinutých po roku 1930: Stoneovej duality pre booleovské algebry a Pontryaginovej duality pre abelovské grupy. Priestleyovej dualita pre distributívne zväzy objavená okolo roku 1970 bola veľmi dôležitým krokom smerom k všeobecnej teórii. Základná práca teórie prirodzených dualít je Davey, Werner [37]. Práca Davey [25] poskytuje prehľad vývoja teórie medzi rokmi 1980 a 1992 a Clark, Davey [16] vývoj až po rok 1998. Posledná monografia je aj štandardným zdrojom referencií v tejto vedeckej disciplíne.

Pripomeňme si v stručnosti základnú schému teórie. Prirodzená dualita nám dáva repräsentáciu triedy \mathcal{A} algebier pomocou triedy \mathcal{X} topologických štruktúr. Dualita je konstruovaná z dvoch rôznych generujúcich štruktúr na definovaných tej istej množine M :

1. konečná algebra $\underline{\mathbf{M}} = \langle M; F \rangle$, ktorá generuje triedu \mathcal{A} ako kvazivarietu t.j. \mathcal{A} pozostáva zo všetkých izomorfných kópií podalgebier priamych mocnín $\underline{\mathbf{M}}$;
2. topologická štruktúra $\mathbf{M} = \langle M; G, H, R, \mathcal{T} \rangle$, známa ako **alter ego** pre algebru $\underline{\mathbf{M}}$, ktorá generuje triedu \mathcal{X} ako topologickú kvazivarietu t.j. \mathcal{X} pozostáva zo všetkých izomorfných kópií (topologicky) uzavretých podštruktúr nenulových priamych mocnín \mathbf{M} .

Alter ego \mathbf{M} je dané množinou G totálnych operácií, množinou H parciálnych operácií, množinou R relácií a diskretnou topológiou \mathcal{T} . (Pritom ktorákoľvek z množín G , H a R môže byť prázdna). Operácie v G a H musia byť homomorfizmami na algebre $\underline{\mathbf{M}}$ a relácie v R musia byť podalgebami príslušných mocnín generujúcej algebry $\underline{\mathbf{M}}$. Tieto predpoklady zabezpečia bezproblémové nasadenie teórie kategórií a vytvoria podmienky pre použitie algebraických metód pri štúdiu vlastností navrhnutého alter ega.

Dualita je následne vybudovaná prirodzeným spôsobom z uvedených dvoch objektov $\underline{\mathbf{M}}$ a \mathbf{M} . Duálom $D(\mathbf{A})$ algebry \mathbf{A} z \mathcal{A} sa nazýva množina $\text{hom}(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{M}})$ všetkých homomorfizmov z \mathbf{A} do $\underline{\mathbf{M}}$ uvažovaná ako topologicky uzavretá podštruktúra mocniny \mathbf{M}^A . (Duál $D(\mathbf{A})$ si možno predstaviť ako akýsi "logaritmus algebry \mathbf{A} pri základe $\underline{\mathbf{M}}$ "). Ak pre všetky algebry \mathbf{A} z \mathcal{A} je \mathbf{A} izomorfná s algebrou $ED(\mathbf{A})$ spojitých štruktúru-zachovávajúcich zobrazení z $D(\mathbf{A})$ do \mathbf{M} , potom hovoríme, že **\mathbf{M} dáva prirodzenú dualitu na \mathcal{A}** alebo že **\mathbf{M} dualizuje $\underline{\mathbf{M}}$** . Ak konečná algebra $\underline{\mathbf{M}}$ má alter ego \mathbf{M} , ktoré dáva dualitu takýmto kanonickým spôsobom, potom hovoríme, že **$\underline{\mathbf{M}}$ je dualizovateľná**. Ak navyše pre každú topologickú štruktúru \mathbf{X} z \mathcal{X} je štruktúra $DE(\mathbf{X})$ izomorfná s \mathbf{X} , hovoríme, že **\mathbf{M} dáva plnú dualitu na \mathcal{A}** alebo že **\mathbf{M} plne dualizuje $\underline{\mathbf{M}}$** . Ak \mathbf{M} plne dualizuje $\underline{\mathbf{M}}$ a \mathbf{M} je injektívna v \mathcal{X} , hovoríme, že **\mathbf{M} dáva silnú dualitu na \mathcal{A}** alebo že **\mathbf{M} silne dualizuje $\underline{\mathbf{M}}$** . Napríklad, keď $\underline{\mathbf{M}} = \langle \{0, 1\}; \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ je 2-prvkový ohraničený zväz (získaný zo známej 2-prvkovej Booleovej algebry pravdivostných hodnôt $\{0, 1\}$ vynechaním operácie komplementu), tak 2-prvkový diskretný topologický reťazec $\mathbf{M} = \langle \{0, 1\}; \leq, \mathcal{T} \rangle$ dáva známu Priestleyovej silnú dualitu pre ohraničené distributívne zväzy. Pritom duál $D(\mathbf{A})$ ohraničeného distributívneho zväzu zodpovedá usporiadanému priestoru príme filtrov algebry \mathbf{A} , zatiaľčo duál $E(\mathbf{X})$ usporiadaného topologického priestoru \mathbf{X} korešponduje so zväzom vlastných neprázdnych obojetných horných koncov priestoru \mathbf{X} .

Plné a silné duality sú užitočnejšie ako púhe duality, pretože umožňujú bezstratový prenos informácií medzi skúmanou triedou algebier a duálnou triedou topologických štruktúr. Vytvárajú tiež oveľa lepšie predpoklady pre aplikácie teórie. Preto sa javí veľmi dôležité spoznať pravú povahu a vlastnosti plných a silných dualít.

Predpoklad v definícii silnej dualizovateľnosti, že \mathbf{M} je injektívny objekt v kategórii \mathcal{X} sa javí ako netriviálny, napriek tomu každý doposiaľ známy príklad plnej duality dáva zároveň silnú dualitu. Doterajší 25-ročný výskum tohto javu leží v srdci teórie prirodzených dualít. "Full versus Strong Problem" sa jednoducho pýta: "*Je každá plná dualita silnou?*"

Základné fakty o problematike vzťahu úplných a silných dualít a ich význame pre teóriu možno nájsť už aj v základnej práci [37] alebo v kapitole 4 neskoršej monografie [16].

10 Vzťah plných a silných prirodzených dualít

Čiastočné riešenia "Full versus Strong" problému teórie prirodzených dualít sú obsiahnuté v prácach Davey, Haviar, Willard [32], Davey, Haviar, Niven [33] a Davey,

Haviar, Niven, Perkal [35]. Pritom v prvej z nich je podané úplné riešenie problému na konečnej úrovni. Zmienime sa o hlavných výsledkoch týchto prác.

Davey, Haviar and Priestley [30] dokázali, že trojprvkový ohraničený distributívny zväz

$$\underline{\mathbf{M}} = \langle \{0, a, 1\}; \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$$

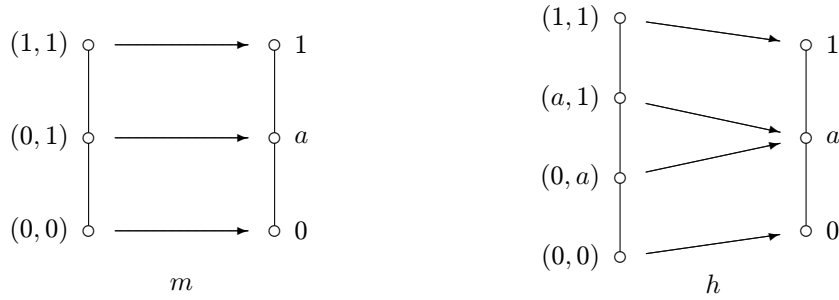
je endodualizovateľný, t.j. že na dualitu stačia len jeho endomorfizmy. (Pozri tiež Davey a Pitkethly [36]). Jediné netriviálne endomorfizmy $\underline{\mathbf{M}}$ sú f a g dané predpismi $f(0) = f(a) = 0, f(1) = 1$ a $g(0) = 0, g(a) = g(1) = 1$. Takže $\underline{\mathbf{M}}$ je dualizované alter egom

$$\mathbf{M} = \langle \{0, a, 1\}; f, g, \mathcal{T} \rangle.$$

To, že táto dualita nie je silná sa ukazuje ľahko: stačí napríklad ukázať, že množina $\{0, 1\}$ určuje podštruktúru \mathbf{M} , ktorá nie je tzv. "hom-closed", t.j. nie je uzavretá na nejakú algebraickú parciálnu operáciu. Definujme parciálnu operáciu $m : \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \rightarrow \{0, a, 1\}$ predpisom $m(0, 0) = 0, m(0, 1) = a$ a $m(1, 1) = 1$. Ukázať, že dualita nie je plná si vyžaduje o trochu väčšiu štruktúru:

$$X := \{(0, 0), (0, a), (0, 1), (a, 1), (1, 1)\}$$

určuje podštruktúru \mathbf{M}^2 , pričom $E(\mathbf{X})$ je švorprvkový reťazec a ľahko sa overí, že $|\text{DE}(\mathbf{X})| = 6$, odkiaľ vyplýva $\mathbf{X} \not\cong \text{DE}(\mathbf{X})$.



Obr. 3: Parciálne binárne operácie m a h použité pri dualite trojprvkového reťazca

Naša práca navrhuje obohatenie štruktúry \mathbf{M} v tvare alter ega

$$\mathbf{M}_h = \langle \{0, a, 1\}; f, g, h, \mathcal{T} \rangle,$$

kde parciálna operácia $h : \{(0, 0), (0, a), (a, 1), (1, 1)\} \rightarrow \{0, a, 1\}$ je definovaná ako $h(0, 0) = 0, h(0, a) = h(a, 1) = a$ a $h(1, 1) = 1$. Ukazujeme, že táto štruktúra dáva dualitu, ktorá nie je plná, hoci je plná na konečnej úrovni. Dualita analogicky ako predtým opäť nie je silná. Parciálna operácia m hrá kľúčovú úlohu v našom skúmaní. Z hlavného výsledku práce Davey a Haviar [29] vyplýva (v [31] bol pôvodný "dôkaz" urobený iba počítačom), že alter ego

$$\mathbf{M}_m = \langle \{0, a, 1\}; f, g, m, \mathcal{T} \rangle$$

dáva silnú, a preto aj plnú dualitu. Štruktúra \mathbf{M}_h , ktorú sme zaviedli, môže byť vnímaná ako akýsi medzistupeň medzi \mathbf{M} a \mathbf{M}_m .

Uvedieme hlavné výsledky práce:

Teoréma 9. Štruktúra $\mathbf{M}_h = \langle \{0, a, 1\}; f, g, h, \mathcal{T} \rangle$ dáva plnú dualitu, ktorá nie je silná na kategórii \mathcal{D}_{fin} konečných ohraničených distributívnych zväzov a dáva dualitu, ktorá nie je plná na kategórii \mathcal{D} všetkých ohraničených distributívnych zväzov.

Z pohľadu nášho úspechu na konečnej úrovni nás nemožno "viniť", že sme spočiatku dúfali, že budeme môcť nájsť príklad plnej ale nie silnej duality pre \mathcal{D} založenej aj na našom generujúcom trojprvkovom reťazci. Ukázali sme však napokon, že táto túžba je nespĺniteľná, pretože platí:

Teoréma 10. *Každá plná dualita pre kategóriu \mathcal{D} všetkých ohraničených distributívnych vzťahov založená na trojprvkovom reťazci je silná.*

V práci Davey, Haviar, Niven a Perkal [35] ukazujeme pomocou veľmi komplikovaných techník dokonca zovšeobecnenie tohto výsledku:

Teoréma 11. *Každá plná dualita pre kategóriu \mathcal{D} všetkých ohraničených distributívnych vzťahov založená na ľubovoľnom konečnom distributívnom vzťahu je silná.*

V práci Davey, Haviar a Niven [33] podávame iné čiastočné riešenie k Full versus Strong Problem. Formulujeme lokálne verzie tohto problému:

Problém 9. *Nech $\underline{\mathbf{M}}$ je ľubovoľná konečná algebra v konkrétnej (vašej obľúbenej) triede \mathcal{C} algebier. Je každá plná dualita založená na $\underline{\mathbf{M}}$ nevyhnutne silnou?*

Problém 10. *Nech $\underline{\mathbf{M}}$ je ľubovoľná konečná algebra v konkrétnej (vašej obľúbenej) triede \mathcal{C} algebier. Je každá plná dualita na konečnej úrovni založená na $\underline{\mathbf{M}}$ nevyhnutne silnou na konečnej úrovni?*

Problém 11. *Nech $\underline{\mathbf{M}}$ je ľubovoľná konečná plne dualizovateľná algebra v konkrétnej (vašej obľúbenej) triede \mathcal{C} algebier. Je $\underline{\mathbf{M}}$ nevyhnutne silne dualizovateľná?*

Cieľom práce bolo ukázať, že tieto lokálne verzie problému majú pozitívne riešenia pre viaceré známe triedy algebier: abelovské grupy, polozväzy, relatívne Stoneove Heytingove algebry a tiež vo všeobecnosti pre ohraničené distributívne vzťahy. Okrem toho v práci prezentujeme niekoľko užitočných dodatkov k všeobecnej teórii.

11 Prenos optimálnych prirodzených dualít

Štúdium prenosu optimálnych dualít z kvazivariety algebier, ktorej generátor spĺňa isté podmienky na minimalitu, na ľubovoľnú generujúcu algebru tej istej kvazivariety bolo začaté v práci B.A. Davey and M. Haviar [27]. Keďže endomorfizmy patria k štandardnej štruktúre zabezpečujúcej prenos, v našej teórii je nová dualita optimálna modulo monoid endomorfizmov. Sú uvedené aplikácie našej teórie pre Kleeneho algebry s pevným bodom operácie negácie, polozväzy, distributívne vzťahy a Stoneove algebry. V každom z týchto prípadov sa dosiahol malý počet (do desať) operácií a relácií umožňujúci skutočne efektívne reprezentácie.

V prípadoch, keď sa generujúca algebra a relácie na nej stávajú väčšími (stačí už napríklad desaťprvkový generátor), je veľmi ťažké s nimi pracovať podľa metód rozpracovaných v [27]. V takých situáciách sa ako prirodzené východisko ponúka využitie logaritmickej vlastnosti Priestleyovej duality. V práci [28] sme rozpracovali teóriu prenosu optimálnej prirodzenej duality s využitím logaritmickej vlastnosti Priestleyovej duality. Táto teória je následne aplikovaná v práci pre triedu Kleeneho algebier bez pevného bodu operácie negácie a pre Leeove triedy pseudokomplementárnych distributívnych vzťahov.

12 Štandardné topologické kvazivariety

Ide o novú problematiku, ktorá leží na rozhraní algebry, topológie a matematickej logiky. Je tiež motivovaná teóriou prirodzených dualít. Úvodná práca teórie Clark,

Davey, Haviar, Pitkethly and Talukder [17] definuje pojem **štandardnej topologickej kvazivariety** a iniciuje program skúmania, ktoré topologické kvazivariety sú štandardné a ktoré nie. Obzvlášť dôležitý je štandardizačný problém pre unárne štruktúry, pretože prirodzené duality s unárnymi duálmi patria medzi najužitočnejšie. Dá sa povedať, že štandardnosť topologickej kvazivariety znamená, že existuje pekný axiomatický opis jej členov, ktorý umožňuje testovať príslušnosť booleovských štruktúr daného typu ku kvazivariete iba skúmaním ich konečných podštruktúr.

Ale štandardnosť nám dáva ešte viac. Zatiaľčo všetky doterajšie dôkazy štandardnosti boli urobené poskytnutím axiomatického systému pre danú kvazivarietu, samotný proces axiomatizácie je možné značne zjednodušiť, ak by sme vedeli dopredu, že daná kvazivarieta je štandardná. Ak totiž kvazivarieta \mathcal{X} generovaná štruktúrou \mathbf{M} je štandardná a máme podmnožinu Σ kvaziatomickej teórie generátora, vieme ukázať, že Σ axiomatizuje \mathcal{X} za púheho predpokladu, že každý model Σ je lokálne konečný a že každý konečný model Σ patrí do \mathcal{X} . Teda štandardnosť nám garantuje, že topologickú kvazivarietu \mathcal{X} možno axiomatizovať *bez akejkoľvek referencie na topológiu*. Akonáhle máme axiomatizáciu Σ pre \mathcal{X} , môžeme rozhodnúť, či booleovská štruktúra \mathbf{X} patrí do \mathcal{X} iba jednoduchým overením, že \mathbf{X} je lokálne konečná a že každá konečná podštruktúra \mathbf{X} spĺňa Σ , opäť bez akejkoľvek referencie na topológiu. Sformulujeme teda hlavný problém teórie:

Problém 12. (Standardization Problem) Ktoré konečné štruktúry \mathbf{M} generujú štandardnú topologickú kvazivarietu \mathcal{X} ?

Prezentujeme vybrané výsledky o štandardnosti.

Lema 12. Ak \mathbf{X} je booleovská štruktúra rovnakého typu ako \mathbf{M} , potom sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:

1. \mathbf{X} modeluje kvaziatomickejšiu teóriu \mathbf{M} ;
2. \mathbf{X} je lokálne konečná a každá konečná podštruktúra \mathbf{X} patrí do \mathcal{X} .

Dôsledok 13. Nech \mathbf{M} je konečná štruktúra. Potom kvazivarieta \mathcal{X} generovaná \mathbf{M} je štandardná práve vtedy, keď každá lokálne konečná booleovská štruktúra \mathbf{X} ktorej všetky podštruktúry sú v \mathcal{X} je sama v \mathcal{X} .

Dôsledok 14. Nech \mathbf{M} je konečná štruktúra, ktorá generuje štandardnú topologickú kvazivarietu. Potom Σ axiomatizuje \mathcal{X} za predpokladu, že každý model Σ je lokálne konečný a že každý konečný model Σ patrí do \mathcal{X} .

V práci [17] sme uviedli mnoho príkladov topologických kvazivariet \mathcal{X} , ktoré sú štandardné a mnoho takých, ktoré nie sú. Ukázali sme, že medzi štandardné topologické kvazivariety patria Booleove priestory, bodové Booleove priestory, Booleove rektangulárne bandy, Booleove abelovské grupy exponentu m , Booleove vektorové priestory nad konečným poľom, Booleove priesekové polozväzy s jednotkou a kvazivariety generované konečnou kvaziprimálnou algebrou. Naopak, ukázali sme, že medzi neštandardné topologické kvazivariety patria Priestleyovej priestory a ďalej duálne kategórie k Stoneovým a dvojne Stoneovým algebrom, k mediánovým algebrom, ku Kleeneho algebrom a k de Morganovým algebrom. Uviedli sme dôkaz, že monounárne štruktúry $\mathbf{M} = \langle M; f, \mathcal{J} \rangle$ sú vždy štandardné. Používajúc tento fakt sme ilustrovali overenie, že istá špeciálna množina axiém Σ axiomatizuje kvazivarietu \mathcal{X} generovanú \mathbf{M} iba vyšetrovaním konečných členov kvazivariety \mathcal{X} . V závere práce sme sformulovali dva problémy:

Problém 13. Je každá štruktúra totálnej algebry (t.j. bez parciálnych operácií) dávajúca silnú dualitu nutne štandardnou?

Problém 14. Je každá štruktúra totálnej algebry s konečnou bázou jej kvaziekvacionálnej teórie nutne štandardnou?

Literatúra

- [1] R.D.M. Accola, On the number of automorphisms of a closed Riemann surface, *Trans. Amer. Math. Soc.* **131** (1968), 398–408.
- [2] M. Belolipetsky, G. Jones, Automorphism groups of Riemann surfaces of genus $p + 1$, preprint.
- [3] P. Bergau and D. Garbe, Non-orientable and orientable regular maps, in Proc. Groups – Korea 1988 (Pusan, August 1988), Lecture Notes in Math. **1398**, Springer-Verlag, Berlin – New York, 1989, 29–42.
- [4] A. Breda d’Azevedo, The reflexible hypermaps of characteristic -2, *Math. Slovaca* **47** (1997), 131–153.
- [5] A. Breda d’Azevedo and G. Jones, Rotary hypermaps of genus 2, *Contributions to Algebra and Geometry* **42** (2001), 39–58.
- [6] A. Breda d’Azevedo, R. Nedela, Chiral hypermaps of small genus, *Contributions to Algebra and Geometry* **44** (1), 2003, 127–143.
- [7] Breda,A.-Breda,A.-Nedela,R.: Chirality group and chirality index of Coxeter toroidal maps, *Ars Comb.*, in print.
- [8] A. Breda, R. Nedela, Half-arc-transitive graphs and regular hypermaps, *European J. Combin.* **25** (2004), 423–436.
- [9] A. Breda, R. Nedela, Chiral hypermaps with few hyperfaces, *Math. Slovaca* **53**, 2003, 107–108.
- [10] A. Breda, G. Jones, R. Nedela, M. Škoviera, Chirality group and chirality index of regular maps and hypermaps, Proceedings of Com²MaC Mini-Workshop on Two-face embeddings of graphs and applications, POSTECH Pohang 2004, Eds. M.M. Deza and J.H.Kwak.
- [11] A. Breda d’Azevedo, R. Nedela, J. Širáň, Classification of regular maps of prime negative Euler characteristic, *Transactions of Amer. Math. Soc.* **307**, 2005, 4175–4190.
- [12] T. Calamoneri, A. Massini, Nearly optimal three-dimensional layout of the hypercube networks, Proc. 11th. Intl. Symposium on Graph Drawing, Lecture Notes on Computer Science 2912, Springer, 2003, 247–258.
- [13] P.J. Cameron, C. E. Praeger, G. M. Seitz, J. Saxl, On the Sim’s conjecture and distance transitive graphs, *Bull London Math. Soc.* **15** (1983), 499–506.
- [14] M. R. Casali and L. Grasselli, 2-symmetric crystallizations and 2-fold branched coverings of S^3 , *Discrete Mathematics* **87** (1991), 9–22.
- [15] D.M. Clark and B.A. Davey, The quest for strong dualities, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **58** (1995), 248–280.
- [16] D.M. Clark and B.A. Davey, *Natural Dualities for the Working Algebraist*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [17] Clark, D.M., Davey B.A., Haviar M., Pitkethly J., Talukder M.R., Standard topological quasi-varieties, *Houston Journal of Mathematics*, **29** (2003), 859–887.
- [18] M. Conder and P. Dobcsányi, Determination of all regular maps of small genus, *J. Combin. Theory B* **81** (2001), 224–242.
- [19] M. Conder, C. Maclachlan, S. Todorovic-Vasiljevic and S. Wilson, Bounds for the number of automorphisms of a compact non-orientable surface, *Journal London Math. Soc.* **68** (2003), 65–82.

-
- [20] M. Conder and B. Everitt, Regular maps on non-orientable surfaces, *Geom. Dedicata* **56** (1995), 209–219.
- [21] M.D.E. Conder, C.H. Li, Ch.E. Praeger, On the Weiss conjecture for finite locally primitive graphs. *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)* **43** (2000), 129–138.
- [22] M.D.E. Conder and D. Marušič, A tetravalent half-arc-transitive graph with non-abelian vertex stabilizer, *J. Combin. Theory B* **88** (2003), 67–76.
- [23] D. Corn and D. Singerman, Regular hypermaps, *European J. Combin.* **9** (1988), 337–351.
- [24] H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, “Generators and Relations for Discrete Groups” (Fourth Edition), Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [25] B.A. Davey, *Duality theory on ten dollars a day*, Algebras and Orders (I.G. Rosenberg and G. Sabidussi, eds), NATO Advanced Study Institute Series, Series C, Vol. **389**, Kluwer Academic Publishers, 1993, pp. 71–111.
- [26] B.A. Davey, *Dualisability in general and endodualisability in particular*, Logic and Algebra (Pontignano, 1994), (A. Ursini and P. Aglianò, eds), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **180**, Dekker, New York, 1996, pp. 437–455.
- [27] Davey, B.A. and Haviar, M.: Transferring optimal dualities: theory and practice, *Journal of Australian Mathematical Society* **74** (2003), 393–420.
- [28] Davey, B.A. and Haviar, M.: Applications of Priestley duality in transferring optimal dualities, *Studia Logica* **78** (2004), 213–236.
- [29] B.A. Davey and M. Haviar, *A schizophrenic operation which aids the efficient transfer of strong dualities*, Houston Math. J. **26** (2000), 215–222.
- [30] B.A. Davey, M. Haviar and H.A. Priestley, *Endoprimal distributive lattices are endodualisable*, Algebra Universalis **34** (1995), 444–453.
- [31] B.A. Davey, M. Haviar and H.A. Priestley, The syntax and semantics of entailment in duality theory, *J. Symb. Logic* **60** (1995), 1087–1114.
- [32] Davey, B.A., Haviar, M. and Willard, R.: Full does not imply strong, does it?, Algebra Universalis **54** (2005), 1–22.
- [33] Davey, B.A., Haviar, M. and Niven, T.: When is a full duality strong? 22 pp., accepted in *Houston Journal of Mathematics*.
- [34] B.A. Davey, Haviar, M. and Willard, R.: Structural entailment, 20 pp., accepted in *Algebra Universalis*.
- [35] Davey, B.A., Haviar, M., Niven, T. and Perkal, N.: Full but not strong dualities at the finite level: extending the realm, 21 pp., submitted in *Algebra Universalis*.
- [36] B.A. Davey and J.G. Pitkethly, *Endoprimal algebras*, Algebra Universalis, **38**, (1997), 266–288.
- [37] B.A. Davey and H. Werner, *Dualities and equivalences for varieties of algebras*, Contributions to Lattice Theory (Szeged, 1980), (A.P. Huhn and E.T. Schmidt, eds) Coll. Math. Soc. János Bolyai **33**, North-Holland, Amsterdam, 1983, pp. 101–275.
- [38] S.F. Du, J.H. Kwak, R. Nedela, Regular maps with pq vertices, *J. Algebraic Combin.* **19**, 2004, 123–141.
- [39] S.F. Du, J.H. Kwak, R. Nedela, Regular embeddings of complete multipartite graphs, *European J. Combin.* **26**, 2005, 505–519.
- [40] S.F. Du, J.H. Kwak, R. Nedela, Regular embeddings of complete multipartite graphs, *European J. Combin.* **26**, 2005, 505–519. Classification of Regular Embeddings of Hypercubes of Odd Dimension

- [41] S.F. Du, G.A. Jones, J.H. Kwak, R. Nedela, M. Škoviera, Regular embeddings of $K_{n,n}$ where n is a power of 2, I: Metacyclic case, preprint.
- [42] S.F. Du, G.A. Jones, J.H. Kwak, R. Nedela, M. Škoviera, Regular embeddings of $K_{n,n}$ where n is a power of 2, II: Nonmetacyclic case, preprint.
- [43] M. Ferri and C. Gagliardi, *Crystallisation moves*, Pacific J. Math. **100** (1982), 85 – 103.
- [44] D. Garbe, Über die regulären Zerlegungen orientierbarer Flächen, *J. Reine Angew. Math.* **237** (1969), 39–55.
- [45] A. Gardiner, Doubly primitive vertex stabilisers in graphs, *Math. Zeitschr.* **135** (1974), 257–266.
- [46] A. Gardiner, Arc-transitivity in graphs, II, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **25** (1974), 163–167.
- [47] A. Gardiner, R. Nedela, J. Širáň and M. Škoviera, Characterization of graphs which underlie regular maps on closed surfaces, *J. London Math. Soc.* **59** (1999), 100–108.
- [48] A.S. Grek, Regular polyhedra on a closed surface with Euler characteristic $\chi = -1$, Russian, *Trudy Tbiliss. Mat. Inst.* **27** (1960), 103–112.
- [49] A.S. Grek, Regular polyhedra of the simplest hyperbolic types, Russian, *Ivanov Gos. Ped. Inst. Učen. Zap.* **34** (1963), 27–30.
- [50] A.S. Grek, Polyhedra on surfaces with Euler characteristic $\chi = -4$, Russian, *Soobšč. Akad. Nauk Gruzin. SSR* **42** (1966), 11–16.
- [51] A.S. Grek, Polyhedra on a closed surface whose Euler characteristic is $\chi = -3$, *Izv. Vyšš. Učeb. Zaved.* **55** (6) (1966), 50–53 (Russian), English translation: *AMS Translations* **78** (1968), 127–131.
- [52] F. Harary, G. Prins, W.T. Tutte, The number of plane trees, *Indag. Math.* **26** (1964), 319–329.
- [53] F. Harary, W.T. Tutte, The number of plane trees with given partition, *Matematika* **11** (1964), 99–101.
- [54] A. Haviar, P. Hrnčiar and G. Monoszová, Excentric sequences and cycles in graphs, *Acta Univ. M. Belii Math.* **11** (2004), 7–25.
- [55] P. Horák, R. Nedela, A. Rosa, The Hamilton-Waterloo Problem: the case of Hamilton Cycles and Triangle-Factors, *Discrete Math.* **284**, 2004, 181–188.
- [56] P. Hrnčiar, G. Monoszová, Minimal excentric sequences with two values, submitted.
- [57] L.D. James and G.A. Jones, Regular orientable imbeddings of complete graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **39** (1985), 353–367.
- [58] G.A. Jones, R. Nedela, Large groups of automorphisms of compact surfaces with prime negative Euler characteristic, preprint.
- [59] G.A. Jones, R. Nedela, M. Škoviera, Regular Embeddings of $K_{n,n}$ where n is an odd prime power, Submitted.
- [60] G.A. Jones, R. Nedela, M. Škoviera, Complete bipartite graphs with unique regular embeddings, Submitted.
- [61] J. Karabáš and R. Nedela: Minimal representatives of G -classes of 3-manifolds of genus two, *Acta Univ. Math. Belii, Ser. Math.* **10**, 2003, 21–45.
- [62] J. Karabáš, P. Maličký and R. Nedela, Fundamental groups of prime 3-manifolds of genus at most two, To appear in Tatra Mountains.

-
- [63] J. Karabáš, P. Malický and R. Nedela, 3-manifolds with Heegaard genus at most two represented by crystallisations with at most 42 vertices, Submitted.
- [64] W. Knapp, On the point stabiliser in a primitive permutation group, *Math. Zeitschr.* **133** (1973), 137–168.
- [65] W. Knapp, Primitive Permutationsgruppen mit einem zweifach primitiven Subkonstituenten, *J. Algebra* **38** (1976), 146–162.
- [66] Y.S.Kwon, R. Nedela, Non-existence of regular embeddings of n -dimensional cubes, accepted in *Discrete Math.*
- [67] C.H. Li, Z.P. Lu, D. Marušič, On primitive permutation groups with small suborbits and their orbital graphs, *Journal of Algebra* **279** (2004), 749–770.
- [68] Y.P. Liu, Some enumerating problems of maps with vertex partition, *Kexue Tongbao Sci. Bul., English Ed.*, **31** (1986), 1009–1014.
- [69] V.A. Liskovets, Enumeration of nonisomorphic planar maps, *Selecta Math. Sovietica*, **4** (1985), 303–323.
- [70] V.A. Liskovets, A reductive technique for enumerating non-isomorphic planar maps. *Discrete Math.* **156** (1996), 197–217.
- [71] V.A. Liskovets, Enumerative formulae for unrooted planar maps: a pattern, *Electronic J. Combin.* **11** (2004).
- [72] C. MacLachlan, A bound for the number of automorphisms of a compact Riemann surface, *J. London Math. Soc.* **44** (1969), 265–272.
- [73] A. Malnič and D. Marušič, Constructing $1/2$ -transitive graphs of valency 4 and vertex stabilizer $Z_2 \times Z_2$, *Discrete Math.* **245** (2002), 203–216.
- [74] D. Marušič, Quartic half-arc-transitive graphs with large vertex stabilizers, *Discrete Math.* **299** (2005), 180–193.
- [75] D. Marušič and R. Nedela, Maps and half-transitive graphs of valency 4, *European J. Combin.* **19**, 1998, 345–354.
- [76] D. Marušič and R. Nedela, On the point stabilizers of transitive groups with non-self-paired suborbits of length 2, *J. Group Theory* **4** (1) (2001), 19–43.
- [77] A. D. Mednykh, R. Nedela, Enumeration of unrooted maps with given genus, Submitted.
- [78] A. D. Mednykh, R. Nedela, Enumeration of unrooted hypermaps with given genus, Submitted.
- [79] M. Meszka, R. Nedela, A. Rosa, Circulants and the chromatic index of Steiner triple systems, accepted *Math. Slovaca*.
- [80] B. Mohar, C. Thomassen, “Graphs on surfaces”, John Hopkins University Press, Baltimore, 2001.
- [81] R. Nedela and M. Škoviera, Exponents of orientable maps, *Proc. London Math. Soc.* (3) **75** (1997), 1–31.
- [82] R. Nedela, M. Škoviera, A. Zlatoš, Regular embeddings of complete bipartite graphs, *Discrete Math.* **258** (1-3), 2002, 379–381.
- [83] P. M. Neumann, Finite permutation groups, edge-coloured graphs and matrices, “Topics in Group Theory and Computation”, (Proc. Summer School, University Coll., Galway, 1973), 82–118, Academic Press, London, 1977.
- [84] M. Pezzana, *Sulla struttura delle varietà compatte*, Atti Math. Sem Fis Univ. Modena **23** (1974), 269 – 277.
- [85] C. E. Praeger, Finite permutation groups - a survey, Groups - Canberra 1989, Lecture Notes in Math. 1456, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

- [86] W. L. Quirin, Extension of some results of Manning and Wielandt on primitive permutation groups, *Math. Zeitschr.* **123** (1971), 223–230.
- [87] A. Raspaud, H. Schröder, O. Sýkora, L. Török, I. Vrto, The antibandwidth and cyclic antibandwidth of meshes and hypercubes, submitted to *Discrete Applied Mathematics*.
- [88] Á. Seress, T. Szabó, Dense graphs with cycle neighbourhoods, *J. Combin. Theory B* **63**, (1995), 281–293.
- [89] F.A. Sherk, The regular maps on a surface of genus three, *Canad. J. Math.* **11** (1959), 452–480.
- [90] C. C. Sims, Graphs and finite permutation groups, *Math. Zeitschr.* **95** (1967), 76–86.
- [91] C. C. Sims, Graphs and finite permutation groups, II, *Math. Zeitschr.* **103** (1968), 276–281.
- [92] L. Torok, I. Vrto, Layout volumes of the hypercube, in Proc. 12th Intl. Symposium on Graph Drawing GD 2004, LNCS 3383, pp414-424, Springer-Verlag Berlin, 2004.
- [93] L. Torok, Volumes of 3D drawings of homogenous product graphs, SOFSEM 2005, LNCS 3381, pp.414-417, Springer-Verlag Berlin, 2005.
- [94] W. T. Tutte, A family of cubical graphs, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **43** (1947), 459–474.
- [95] W.T. Tutte, The number of planted plane trees with a given partition, *Amer. Math. Monthly* **71** (1964), 64-74.
- [96] W.T. Tutte, “Connectivity in graphs”, Toronto University Press, 1966.
- [97] R. J. Wang, The primitive permutation groups with an orbital of length 4, *Comm. Algebra* **20** (1992), 889–921.
- [98] R. Weiss, The non-existence of 8-transitive graphs, *Combinatorica* **1** (1981), 309–311.
- [99] S.E. Wilson and A. Breda d’Azevedo, Surfaces having no regular hypermaps, *Discrete Math.* **277** (2004), 241–274.
- [100] W. J. Wong, Determination of a class of primitive permutation groups, *Math. Zeitschr.* **99** (1967), 235–246.
- [101] N.C. Wormald, Counting unrooted planar maps, *Discrete Math.* **36** (1981), 205–225.
- [102] N.C. Wormald, On the number of planar maps, *Canad. J. Math.* **33** (1) (1981), 1-11.

13 Publikácie, ktoré vznikli v rámci riešenia projektu

Vedecké štúdie v karentovaných periodikách (podľa ISI-web of science):

1. Breda, A.-Nedela, R.: Half-arc-transitive graphs and regular hypermaps, *European J. Combin.* **25**, 2004, 423–436.
2. Breda, A.-Nedela, R.-Širáň, J.: Classification of regular maps of prime negative Euler characteristic, *Transactions of Amer. Math. Soc.* **357**, 2005, 4175–4190.
3. Clark, D.M.-Davey, B.A.-Haviar, M.-Pitkethly, J.-Talukder, M.R., Standard topological quasi-varieties, *Houston Journal of Mathematics*, **29**, 2003, 859–887.
4. Davey, B.A.-Haviar, M.: Transferring optimal dualities: theory and practice, *Journal of Australian Mathematical Society* **74**, 2003, 393–420.
5. Davey, B.A.-Haviar, M.: Applications of Priestley duality in transferring optimal dualities, *Studia Logica* **78**, 2004, 213–236.
6. Davey, B.A.-Haviar, M.-Willard, R.: Full does not imply strong, does it?, *Algebra Universalis* **54** (2005), 1–22.
7. Davey, B.A.-Haviar, M.-Niven, T.: When is a full duality strong? 22 pp., accepted in *Houston Journal of Mathematics*.
8. Davey, B.A.-Haviar, M.-Willard, R.: Structural entailment, 20 pp., accepted in *Algebra Universalis*.
9. Haviar, A.-Lihová, J.: Varieties of posets, accepted in *Order*.
10. Du, S.F.-Kwak, J.H.-Nedela, R.: Regular maps with pq vertices, *J. Algebraic Combin.* **19**, 2004, 123–141.
11. Du, S.F.-Kwak, J.H.-Nedela, R.: Regular embeddings of complete multipartite graphs, *European J. Combin.* **26**, 2005, 505–519.
12. Horák, P.-Nedela, R.-Rosa, A.: The Hamilton-Waterloo Problem: the case of Hamilton Cycles and Triangle-Factors, *Discrete Math.* **284**, 2004, 181–188.
13. Kwon, Y.S.-Nedela, R.: Non-existence of regular embeddings of n -dimensional cubes, accepted in *Discrete Math.*
14. Malnič, A.-Nedela, R.-Škoviera, M.: Regular homomorphisms and regular maps, *European J. Combin.* **23** (4), 2002, 449–461.
15. Marusič, D.-Nedela, R.: Finite graphs of valency 4 and girth 4 admitting half-transitive group actions, *J. Austral. Math. Soc.* **73**, 2002, 155–170.
16. Nedela, R.-Škoviera, M.-Zlatoš, A.: Regular embeddings of complete bipartite graphs, *Discrete Math.* **258** (1-3), 2002, 379–381.

Vedecké štúdie v periodikách karentovaných Math. Reviews (mimo ISI-web of Science):

a) zahraničné periodiká

1. Breda, A.-Nedela, R.: Chiral hypermaps of small genus, *Contributions to Algebra and Geometry* **44** (1), 2003, 127–143.
2. Breda, A.-Breda, A.-Nedela, R.: Chirality group and chirality index of Coxeter toroidal maps, *Ars Comb.*, in print.

b) domáce periodiká

1. Breda, A.-Nedela, R.: Chiral hypermaps with few hyperfaces, *Math. Slovaca* **53**, 2003, 107–108.
2. Haviar, A.-Hrnčiar, P.-Monoszová, G.: Excentric sequences and cycles in graphs, *Acta Univ. M. Belii Math.* **11** 2004, 7–25.
3. Haviar, A.-Monoszová, G.: Constructions of cell algebras, *Mathematica Bohemica* **130**, 2005, 89–100.
4. Karabáš, J.-Nedela, R.: Minimal representatives of G -classes of 3-manifolds of genus two, *Acta Univ. Math. Belii, Ser. Math.* **10**, 2003, 21–45.
5. Meszka, M.-Nedela, R.-Rosa, A.: Circulants and the chromatic index of Steiner triple systems, accepted *Math. Slovaca*.

Vedecké štúdie v konferenčných zborníkoch:

1. Breda, A.-Nedela, R.-Širáň, J.: Classification of regular maps of prime negative Euler characteristic, Proceedings of Com2Mac Mini-Workshop on Hurwitz Theory and Ramifications, Pohang University of Science and Technology, Korea 2003, 89–99.
2. Nedela, R.: Regular maps-combinatorial objects relating different fields of mathematics, Proceedings of Com2Mac Mini-Workshop on Hurwitz Theory and Ramifications, Pohang University of Science and Technology, Korea 2003, 333–361.
3. Du, S.F.-Kwak, J.H.-Nedela, R.: A classification of regular embeddings of graphs of order a product of two primes, Proceedings of Com2Mac Mini-Workshop on Hurwitz Theory and Ramifications, Pohang University of Science and Technology, Korea 2003, 333–361.
4. Breda, A.-Jones, G.-Nedela, R.-Škoviera, M.: Chirality group and chirality index of regular maps and hypermaps, Proceedings of Com²MaC Mini-Workshop on Two-face embeddings of graphs and applications, POSTECH Pohang 2004, Eds. M.M. Deza and J.H.Kwak.
5. Torok, Ľ.-Vrťo, I.: Layout volumes of the hypercube, in Proc. 12th Intl. Symposium on Graph Drawing GD 2004, LNCS 3383, pp414-424, Springer-Verlag Berlin, 2004.
6. Torok, Ľ.: Volumes of 3D drawings of homogenous product graphs, SOFSEM 2005, LNCS 3381, pp.414-417, Springer-Verlag Berlin, 2005.
7. J. Karabáš, P. Maličský and R. Nedela, Fundamental groups of prime 3-manifolds of genus at most two, To appear in Tatra Mountains.

Nepublikované práce

1. G.A. Jones, R. Nedela, Large groups of automorphisms of compact surfaces with prime negative Euler characteristic, preprint.
2. J. Karabáš, P. Maličský and R. Nedela, 3-manifolds with Heegaard genus at most two represented by crystallisations with at most 42 vertices, Submitted.
3. A. D. Mednykh, R. Nedela, Enumeration of unrooted maps with given genus, Submitted.
4. A. D. Mednykh, R. Nedela, Enumeration of unrooted hypermaps with given genus, Submitted.
5. G.A. Jones, R. Nedela, M. Škoviera, Regular Embeddings of $K_{n,n}$ where n is an odd prime power, Submitted.

-
6. S.F. Du, G.A. Jones, J.H. Kwak, R. Nedela, M. Škoviera, Regular embeddings of $K_{n,n}$ where n is a power of 2, I: Metacyclic case, preprint.
 7. S.F. Du, G.A. Jones, J.H. Kwak, R. Nedela, M. Škoviera, Regular embeddings of $K_{n,n}$ where n is a power of 2, II: Nonmetacyclic case, preprint.
 8. G.A. Jones, R. Nedela, M. Škoviera, Complete bipartite graphs with unique regular embeddings, Submitted.
 9. Davey, B.A., Haviar, M., Niven, T. and Perkal, N.: Full but not strong dualities at the finite level: extending the realm, 21 pp., submitted.
 10. Haviar, M. and Priestley, H.A.: Canonical extensions of Stone and double Stone algebras: the natural way, 21 pp., submitted.
 11. Haviar, M. and Ploščica, M.: Compatible functions on bounded distributive lattices, 10. pp, Submitted.
 12. Hrnčiar, P.-Monoszová, G.: Minimal excentric sequences with two values, Submitted.
 13. Raspaud, A.-Shroder, H.-Sykora, O.-Torok, L.-Vrto, I.: The antibandwidth and cyclic antibandwidth of meshes and hypercubes, submitted to Discrete Applied Mathematics.

14 Zoznam vybraných prednášok na pozvanie a vystúpení na konferenciách

1. R. Nedela, Classification of regular maps of prime Euler characteristic, Com2Mac Mini-Workshop on Hurwitz Theory and Ramifications, January 13-18, 2003, Pohang, Korea.
2. M. Haviar, Order-polynomial completeness of lattices and related problems, pozvaný plenárny prednášateľ na konferencii Lattices, Universal Algebra and Applications, Lisabon, Portugalsko, 28-30 May, 2003.
3. R. Nedela, Chirality group and chirality index of regular maps and hypermaps, Com2Mac Mini-Workshop on 2-type-face embeddings of graphs and applications, January 11-21, 2004, Pohang, Korea.
4. R. Nedela, Chirality index and chirality group of a map, Pozvaná prednáška, KAIST, Daejon, 2004, Korea.
5. R. Nedela, Regular maps of prime negative Euler characteristic, Maple conference July 2004, Simon Fraser University, Vancouver.
6. R. Nedela, Regular embeddings of complete bipartite graphs, Australian-New Zealand conference in combinatorics and optimization, December 2004, New Zealand.
7. M. Haviar, Compatible functions on distributive lattices - on a problem of G. Grätzer, pozvaná prednáška v Centro de Algebra da Universidade de Lisboa, Lisabon, Portugalsko, júl 2004.
8. M. Haviar, Order-polynomial completeness of lattices and related problems, prednáška v rámci pozície Honorary Associate Fellow, Institute for Advanced Study, Melbourne, November 25, 2004.
9. M. Haviar, Description of compatible functions on distributive lattices, La Trobe University, General Algebra Seminar, Mathematics department, December 7, 2004.
10. L. Torok, Československá konferencia Grafy, Vyšné Ružbachy, Slovensko, 2004, Objemy uložení hyperkocky.

11. J. Karabáš, Československá konferencia Grafy, Vyšné Ružbachy, Slovensko, 2004, Manifolds, groups and graphs.
12. J. Karabáš, Pozvaná prednáška Bologna Univ., 2004, Representation of 3-manifolds using crystallisations.
13. L. Torok, Graph Drawing 2004, New York, USA, Layout volumes of the hypercube, 2004.
14. R. Nedela, Regular embeddings of complete bipartite graphs, Workshop: Graph embeddins and maps on surfaces, Stara Lesna, Jul 2005.
15. J. Karabáš, Combinatorial classification of 3-manifolds with Heegaard genus at most two, Workshop: Graph embeddins and maps on surfaces, Stara Lesna, Jul 2005.
16. M. Haviar, When is a full duality strong?, 70 th Workshop on General Algebra, Vienna Technical University, May 27, 2005.
17. M. Haviar, Congruence preserving functions on distributive lattices, Conference on Universal Algebra and Lattices, Bolyai Institute of the University of Szeged, July 4-8, 2005.
18. J. Karabáš, Combinatorial classification of 3-manifolds, Midsummer workshop in combinatorics, Prague 2005.
19. R. Nedela, Chromatic index of cyclic Steiner triple systems, Midsummer workshop in combinatorics, Prague 2005.
20. R. Nedela, Chromatic number of circulants of valency six, Czech-Catalan conference in mathematics, Prague 2005.
21. L. Torok, SOFSEM 2005, Liptovský Ján, Slovensko, Volumes of 3D drawing of homogenous product graphs, 2005.
22. L. Torok, STTI 2005, Praha, Univerzita Karlova, Česká rep., Layout volumes of the hypercube, 2005.
23. L. Torok, Československá konferencia Grafy, Budmerice, Slovensko, 2005, Anti-bandwidth and cyclic antibandwidth of meshe and hypercubes.
24. J. Karabáš, Československá konferencia Grafy, Budmerice, Slovensko, 2005, h -hamiltonicity of polyhedral graphs,
25. L. Torok, ICGT '05, Hyères, France, Cyclic antibandwidth of meshes and hypercubes, 2005.

15 Zhrnutie

Cieľom projektu bolo študovať vlastnosti rôznych typov algebier, ktoré sú vhodným nástrojom na opis kombinatorických štruktúr ako napríklad graf, mapa, orientovaný graf, hypergraf, kombinatorický plán, kvantová logika a nájsť ich aplikácie v rôznych oblastiach. Spôsob naplnenia cieľa je pre jednotlivé oblasti podrobne opísaný v predchádzajúcich sekciách. Najvýznamnejšie výsledky boli dosiahnuté v teórii máp a hypermáp a v teórii duálnych reprezentácií algebraických štruktúr. Dosiahnuté výsledky sú obsahom 43 vedeckých štúdií, z nich 16 bolo publikovaných v zahraničných karentovaných periodikách. Dosiahnuté výsledky boli prezentované na 25 medzinárodných konferenciách na štyroch kontinentoch.